

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВУЗОВСКИХ
КОНТИНГЕНТОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ
ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ**

Московкин В.М., Биляль Н.Е. Сулейман

*Белгородский государственный университет, Белгород,
e-mail: moskovkin@bsu.edu.ru*

Математическая модель конкуренции двух вузов за ограниченный контингент абитуриентов, предложенная Л.А. Серковым, была упрощена до уровня, позволяющего исследовать её методами качественной теории динамических систем. Определены 8 особых точек упрощённой динамической системы и проделан анализ их устойчивости, что позволило получить все режимы поведения образовательной системы. Модель распространена на $n + 1$ -мерный случай (n вузов, конкурирующих за ограниченный контингент абитуриентов).

Ключевые слова: математическая модель, уравнения популяционной динамики, конкуренции вузов, качественная теория динамических систем, устойчивость особых точек, вузовские контингенты

Для описания широкого класса социальных систем В. Вайдлихом в 1988 г. в работе «Стабильность и цикличность в социальных системах» на основе логистических уравнений была предложена нелинейная динамическая система второго порядка [1]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[a(y)s - x]; \\ \frac{dy}{dt} = y[b(x)s - y], \end{cases} \quad (1)$$

где кусочнопеременные функции влияния $a(y)$ и $b(x)$ описывают кооперативный или антагонистический характер взаимодействия переменных. Например, если воздействие y на x кооперативное, то

$$\begin{cases} a(y) = a_- < 0, \text{ если } 0 < y \leq y_s; \\ a(y) = a_+ > 0, \text{ если } y_s < y \leq \infty, \end{cases} \quad (2)$$

где y_s – точка переключения функции влияния. Здесь возможно четыре варианта взаимодействия макроременных x и y . Эта модель в работе [2] использовалась для анализа развития системы образования в условиях конкуренции. В работе [3] модель (1) была распространена на трехмерный случай

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[a(y, z)s - x]; \\ \frac{dy}{dt} = y[b(x, z)s - y]; \\ \frac{dz}{dt} = z[c(x, y)s - z], \end{cases} \quad (3)$$

при задании следующих функций влияния

$$\begin{aligned} a(y, z) &= -A_{yx} \operatorname{th} [k(y - y_{yx})] + A_{zx} \operatorname{th} [k(z - z_{zx})]; \\ b(x, z) &= -A_{xy} \operatorname{th} [k(x - x_{xy})] + A_{zy} \operatorname{th} [k(z - z_{zy})]; \\ c(x, y) &= -A_{xz} \operatorname{th} [k(x - x_{xz})] + A_{yz} \operatorname{th} [k(y - y_{yz})], \end{aligned} \quad (4)$$

где $x_{xy}, x_{xz}, y_{yx}, y_{yz}, z_{zx}, z_{zy}$ – точки переключения функций влияния, при пересечении которых происходит изменение характера взаимодействия макропеременных (с подавлением на усиление или наоборот).

Проделаны численные эксперименты с этой моделью при базовых параметрах $s = 5, k = 1, A_{ij} = 1, x_{xy} = x_{xz} = x_s = 4,5, y_{yx} = y_{yz} = y_s = 4,25, z_{zx} = z_{zy} = z_s = 4,2$, при этом модель интерпретирована как конкуренция двух однопрофильных вузов (x, y – количество студентов в них) за некоторый ограниченный ресурс абитуриентов (z – количество абитуриентов).

В результате численных экспериментов в работе [3] были получены только би-

стабильные режимы поведения образовательной системы: $(x_s^*, 0, z_s^*)$; $(0, y_s^*, z_s^*)$, а сложность задания функций влияния (4) не позволила проделать ее качественный анализ. Поэтому мы решили трансформировать модель (3) таким образом, чтобы ее можно было исследовать простейшими методами качественной теории динамических систем. Это удобно сделать в рамках моделей типа «хищник – жертва» с представлением их коэффициентов таким образом, как это делается в моделях попарных конкурентно-кооперационных взаимодействий [4, 5]. В этом случае систему уравнений (3) запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_1 x - \beta_1 x^2 - \gamma_1 xy + \varepsilon_1 xz; \\ \frac{dy}{dt} = \alpha_2 y - \beta_2 y^2 - \gamma_2 xy + \varepsilon_2 yz; \\ \frac{dz}{dt} = \alpha_3 z - \beta_3 z^2 - \varepsilon_1 xz - \varepsilon_2 yz, \end{cases} \quad (5)$$

где x – количество студентов в первом вузе, y – количество студентов во втором вузе, z – количество абитуриентов, желающих поступать в эти два вуза, $\alpha_i > 0$ – коэффициенты роста, $\beta_i > 0$ – коэффициенты внутриконтингентной (внутривузовской) конкуренции, $\gamma_i > 0$ – коэффициенты межконтингентной (межвузовской) конкуренции, $\varepsilon_i > 0$ – коэффициенты студенческо (вузовско)-абитуриентской кооперации.

В модели (5) помимо трех логистических членов и межвузовской конкуренции (члены: $-\gamma_1 xy$) учитывается баланс при студенческо-абитуриентских взаимодействиях (например, приток абитуриентов в первый вуз ($\varepsilon_1 xz$) равен оттоку абитуриентов из их общей численности ($-\varepsilon_1 xz$)).

Особые точки динамической системы (5) найдем из решения следующей системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x(\alpha_1 - \beta_1 x - \gamma_1 y + \varepsilon_1 z) = 0; \\ y(\alpha_2 - \beta_2 y - \gamma_2 x + \varepsilon_2 z) = 0; \\ z(\alpha_3 - \beta_3 z - \varepsilon_1 x - \varepsilon_2 y) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Эта система уравнений имеет восемь особых точек. Выпишем их по порядку, которые определяют координаты:

1. $x_* = 0, \quad y_* = 0, \quad z_* = 0.$
2. $x_* = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad y_* = 0, \quad z_* = 0.$
3. $x_* = 0, \quad y_* = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad z_* = 0.$
4. $x_* = 0, \quad y_* = 0, \quad z_* = \frac{\alpha_3}{\beta_3}.$
5. $x_* = 0, \quad y_* = \frac{\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\varepsilon_2}{\beta_2\beta_3 + \varepsilon_2^2}, \quad z_* = \frac{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\varepsilon_2}{\beta_2\beta_3 + \varepsilon_2^2}.$
6. $x_* = \frac{\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\varepsilon_1}{\beta_1\beta_3 + \varepsilon_1^2}, \quad y_* = 0, \quad z_* = \frac{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\varepsilon_1}{\beta_1\beta_3 + \varepsilon_1^2}.$
7. $x_* = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\gamma_1}{\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2}, \quad y_* = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\gamma_2}{\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2}, \quad z_* = 0.$
8. $x_* = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & -\varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \varepsilon_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & -\varepsilon_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}, \quad y_* = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & -\varepsilon_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & -\varepsilon_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \beta_3 \end{vmatrix}},$
 $z_* = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & -\varepsilon_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}.$

Матрица Якоби линеаризованной динамической системы (5) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\beta_1x_* - \gamma_1y_* + \varepsilon_1z_* & -\gamma_1x_* & \varepsilon_1x_* \\ -\gamma_2y_* & \alpha_2 - 2\beta_2y_* - \gamma_2x_* + \varepsilon_2z_* & \varepsilon_2y_* \\ -\varepsilon_1z_* & -\varepsilon_2z_* & \alpha_3 - 2\beta_3z_* - \varepsilon_1x_* - \varepsilon_2y_* \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Характеристическое уравнение для этой матрицы имеет вид

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha_1 - 2\beta_1x_* - \gamma_1y_* + \varepsilon_1z_* - \lambda & -\gamma_1x_* & \varepsilon_1x_* \\ -\gamma_2y_* & \alpha_2 - 2\beta_2y_* - \gamma_2x_* + \varepsilon_2z_* - \lambda & \varepsilon_2y_* \\ -\varepsilon_1z_* & -\varepsilon_2z_* & \alpha_3 - 2\beta_3z_* - \varepsilon_1x_* - \varepsilon_2y_* - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Для первой тривиальной особой точки характеристическое уравнение (8) примет вид

$$(\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda)(\alpha_3 - \lambda) = 0,$$

и следовательно эта точка является неустойчивым узлом.

Для второй особой точки уравнение (8) примет вид

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\alpha_1 - \lambda & -\gamma_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1} & \varepsilon_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ 0 & \alpha_2 - \gamma_2 \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - \varepsilon_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\alpha_1 - \lambda) \left(\alpha_2 - \frac{\gamma_2 \alpha_1}{\beta_1} - \lambda \right) \left(\alpha_3 - \frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\beta_1} - \lambda \right) = 0.$$

Здесь устойчивый узел возникает при $\alpha_2 \beta_1 - \gamma_2 \alpha_1 < 0$, $\alpha_3 \beta_1 - \varepsilon_1 \alpha_1 < 0$, в остальных случаях приходим к седловой неустойчивой точки. Аналогичная ситуация имеет место

для третьей особой точки, которая является устойчивым узлом при $\alpha_1 \beta_2 - \gamma_1 \alpha_2 < 0$, $\alpha_3 \beta_2 - \varepsilon_2 \alpha_2 < 0$.

Для четвертой особой точки уравнение (8) приводится к виду

$$\left(\alpha_1 + \frac{\varepsilon_1 \alpha_3}{\beta_3} - \lambda \right) \left(\alpha_2 + \frac{\varepsilon_2 \alpha_3}{\beta_3} - \lambda \right) (-\alpha_3 - \lambda) = 0,$$

и следовательно эта точка является седлом.

Для пятой особой точки уравнение (8) приводится к виду

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - \gamma_1 y_* + \varepsilon_1 z_* - \lambda) \left[\lambda^2 + \lambda (-\alpha_2 - \alpha_3 + 2\beta_3 z_* + 2\beta_2 y_* + \varepsilon_2 y_* - \varepsilon_2 z_*) + \right. \\ & \left. + \alpha_2 \alpha_3 - 2\beta_2 \alpha_3 y_* + \alpha_3 \varepsilon_2 z_* - 2\beta_3 \alpha_2 z_* + 4\beta_2 \beta_3 y_* z_* - \right. \\ & \left. - 2\beta_3 \varepsilon_2 z_*^2 - \varepsilon_2 \alpha_2 y_* + 2\beta_2 \varepsilon_2 y_*^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим упрощенный случай при $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $\gamma_i = m\gamma$, $\varepsilon_i = \varepsilon$,

тогда уравнение (9) приводится к виду

$$\left[\frac{\alpha(\beta^2 - \gamma\beta - \gamma\varepsilon + \varepsilon\beta)}{\beta^2 + \varepsilon^2} - \lambda \right] \left[\lambda^2 + \frac{2\alpha\beta^2}{\beta^2 + \varepsilon^2} \lambda + \frac{\alpha^2(\beta^4 + \varepsilon^4 - 2\beta\varepsilon^3)}{(\beta^2 + \varepsilon^2)^2} \right] = 0, \quad (10)$$

при этом $y_* = \frac{\alpha(\beta + \varepsilon)}{\beta^2 + \varepsilon^2}$, $z_* = \frac{\alpha(\beta - \varepsilon)}{\beta^2 + \varepsilon^2} > 0$, при $\beta > \varepsilon$.

Из кубического уравнения (10) определим собственные числа λ_i :

$$\lambda_1 = \frac{\alpha(\beta^2 - \gamma\beta - \gamma\varepsilon + \varepsilon\beta)}{\beta^2 + \varepsilon^2}, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\alpha}{\beta^2 + \varepsilon^2} \left[\beta \pm \varepsilon \sqrt{\varepsilon(2\beta - \varepsilon)} \right]. \quad (11)$$

Можно показать, что первое собственное число будет отрицательным при удовлетворении следующего неравенства

$$\lambda_1 > 0 \Leftrightarrow 0 < \beta < -\frac{(\varepsilon - \gamma)}{2} + \sqrt{\frac{(\varepsilon - \gamma)^2}{4} + \varepsilon\gamma}.$$

Далее, λ_2 (знак плюс в выражении (11)) будет действительным отрицательным при $2\beta \geq \varepsilon$, λ_3 будет действительным отрицательным при $\beta > \varepsilon$. Таким образом, условия положительности особых точек и отрицательности собственных чисел требуют выполнения неравенств

$$0 < \beta < -\frac{(\varepsilon - \gamma)}{2} + \sqrt{\frac{(\varepsilon - \gamma)^2}{4} + \varepsilon\gamma}, \quad \beta > \varepsilon. \quad (12)$$

В этом случае особая точка $(0, y_*, z_*)$ является устойчивым узлом.

Для шестой особой точки уравнение (8) приводится к виду

$$\begin{aligned} & (\alpha_2 - \gamma_2 x_* + \varepsilon_2 z_* - \lambda) \left[\lambda^2 + \lambda(-\alpha_1 - \alpha_3 + 2\beta_1 x_* + 2\beta_3 z_* + \varepsilon_1 x_* - \varepsilon_2 z_*) + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_1 \alpha_3 - 2\alpha_1 \beta_3 z_* - \alpha_1 \varepsilon_1 x_* - 2\beta_1 \alpha_3 x_* + \right. \\ & \quad \left. + 4\beta_1 \beta_3 x_* z_* + 2\beta_1 \varepsilon_1 x_*^2 + \alpha_3 \varepsilon_1 z_* - 2\beta_3 \varepsilon_1 z_*^2 - \varepsilon_1^2 z_* x_* + \varepsilon_1^2 z_*^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Упрощенный случай $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $\gamma_i = \gamma$, $\varepsilon_i = \varepsilon$, $x_* = \frac{\alpha(\beta + \varepsilon)}{\beta^2 + \varepsilon^2}$, $z_* = \frac{\alpha(\beta - \varepsilon)}{\beta^2 + \varepsilon^2}$ приводит

нас к тем же результатам, которые были получены для пятой особой точки.

Для седьмой особой точки уравнение (8) приводится к виду

$$\begin{aligned} & (\alpha_3 - \varepsilon_1 x_* - \varepsilon_2 y_* - \lambda) \left[\lambda^2 + \lambda(-\alpha_1 - \alpha_2 + 2\beta_1 x_* + 2\beta_2 y_* + \gamma_1 y_* + \gamma_2 x_*) + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 - 2\alpha_1 \beta_2 y_* - \alpha_1 \gamma_2 x_* - 2\beta_1 \alpha_2 x_* + 4\beta_1 \beta_2 x_* y_* + \right. \\ & \quad \left. + 2\beta_1 \gamma_2 x_*^2 - \gamma_1 \alpha_2 y_* + 2\beta_2 \gamma_1 y_*^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Упрощенный случай $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $\gamma_i = \gamma$, $\varepsilon_i = \varepsilon$, $x_* = y_* = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$, где $\beta \neq \gamma$, приводит

нас к следующему кубическому уравнению

$$\left[\alpha \left(\frac{\beta + \gamma - 2\varepsilon}{\beta + \gamma} \right) - \lambda \right] \left[\lambda^2 + \left(\frac{2\alpha\beta}{\beta + \gamma} \right) \lambda + \frac{\alpha^2(\beta - \gamma)}{(\beta + \gamma)} \right] = 0. \quad (15)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda_1 = \alpha \left(\frac{\beta + \gamma - 2\varepsilon}{\beta + \gamma} \right), \quad \lambda_2 = \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta + \gamma}, \quad \lambda_3 = -\alpha. \quad (16)$$

Отрицательность собственных чисел λ_3 , а следовательно, и устойчивый узел для седьмой особой точки будет иметь место при следующих ограничениях на параметры модели

$$\frac{2\varepsilon}{\beta + \gamma} > 1, \quad \gamma < \beta. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{В случае } \beta = \gamma \text{ имеем } x_* + y_* &= \frac{\alpha}{\beta}, \\ \lambda_1 = \alpha - \varepsilon(x_* + y_*) &= \alpha \left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta}\right), \quad \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 &= -\frac{2\alpha\beta}{\beta + \gamma} < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае при $\varepsilon \geq \beta$ имеем устойчивый узел.

Для восьмой нетривиальной особой точки уравнение (8) рассмотрим для упрощенного случая $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $\gamma_i = \gamma$, $\varepsilon_i = \varepsilon$, когда

$$x_* = y_* = \frac{\alpha(\beta^2 - \gamma\beta - \varepsilon\gamma + \beta\varepsilon)}{\beta^3 + 2\beta\varepsilon^2 - 2\gamma\varepsilon^2 - \gamma^2\beta}, \quad z_* = \frac{\alpha(\beta^2 - 2\beta\varepsilon + 2\varepsilon\gamma - \gamma^2)}{\beta^3 + 2\beta\varepsilon^2 - 2\gamma\varepsilon^2 - \gamma^2\beta}. \quad (18)$$

После достаточно громоздких преобразований оно было приведено к кубическому уравнению

$$\begin{aligned} \lambda^3 - (2A + B)\lambda^2 + \left[A^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right) + 2AB \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}\right) \right] \lambda + \\ + A^2 B \left(\frac{2\gamma\varepsilon^2}{\beta^3} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} - 1 \right) - AB^2 \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

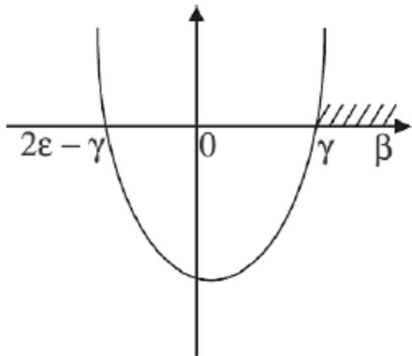
$$\text{где } A = -\beta x_* = \frac{\alpha\beta(-\beta^2 + \gamma\beta + \varepsilon\gamma - \varepsilon\beta)}{\beta^3 + 2\beta\varepsilon^2 - 2\gamma\varepsilon^2 - \gamma^2\beta}; \quad B = -\beta z_* = \frac{\alpha\beta(-\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\varepsilon - 2\varepsilon\gamma)}{\beta^3 + 2\beta\varepsilon^2 - 2\gamma\varepsilon^2 - \gamma^2\beta}.$$

Получим условия положительности особых точек. При $\beta > \gamma$ автоматически следует, что $x_* > 0$, $y_* > 0$. Для выполнения условия $z_* > 0$ необходимо выполнение системы неравенств

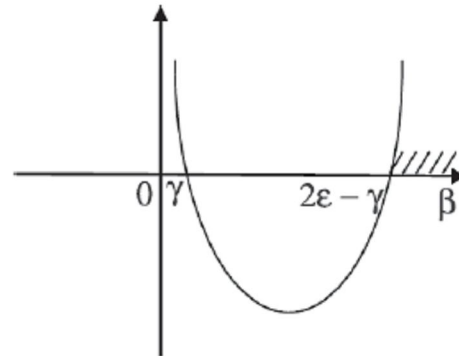
$$\begin{cases} \beta^2 - 2\beta\varepsilon + 2\varepsilon\gamma - \gamma^2 > 0; \\ \beta > \gamma. \end{cases} \quad (20)$$

Корни квадратного уравнения $\beta^2 - 2\beta\varepsilon + 2\varepsilon\gamma - \gamma^2 = 0$ имеют вид $\beta_2 = 2\varepsilon - \gamma$ при $\varepsilon > \gamma$. Для решения этого неравенства необходимо рассмотреть три случая $\beta_1 = 2\varepsilon - \gamma$, $\beta_2 = \gamma$ при $\varepsilon < \gamma$ и $\beta_1 = \gamma$.

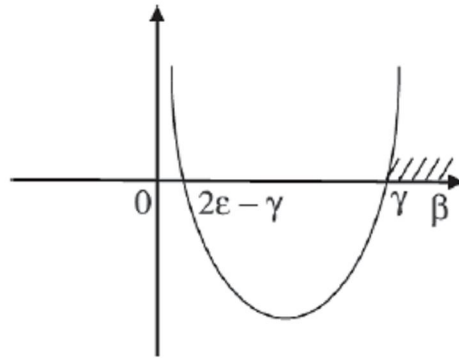
1. $2\varepsilon - \gamma < 0$



2. $0 < \gamma < 2\varepsilon - \gamma \Leftrightarrow 0 < \gamma < \varepsilon$



3. $0 < 2\varepsilon - \gamma < \gamma \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \gamma$



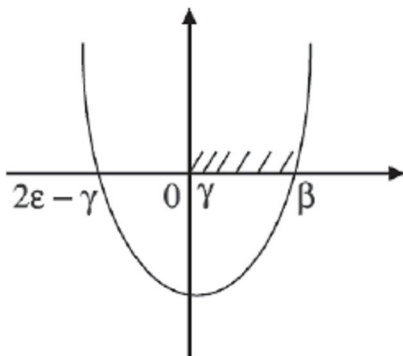
Таким образом, в первом и третьем случаях неравенство (20) имеет решение $\beta > \gamma$, во втором – $\beta > 2\varepsilon - \gamma$.

При этом автоматически следует, что $x_* > 0$, $y_* > 0$. Для выполнения условия $z_* > 0$ необходимо выполнение системы неравенств

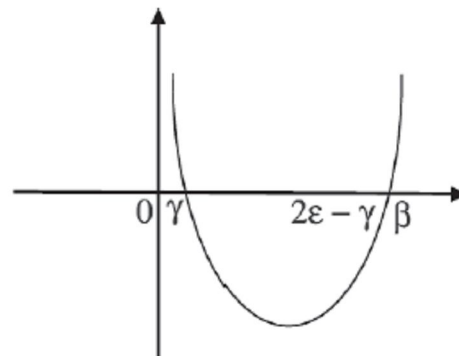
$$\begin{cases} \beta^2 - 2\beta\varepsilon + 2\varepsilon\gamma - \gamma^2 < 0; \\ 0 < \beta < \gamma. \end{cases} \quad (21)$$

Как и ранее, для решения этого неравенства необходимо рассмотреть три случая

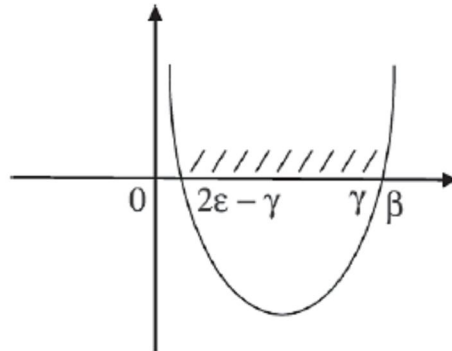
1. $2\varepsilon - \gamma < 0$



2. $0 < \gamma < 2\varepsilon - \gamma \Leftrightarrow 0 < \gamma < \varepsilon$



$$3. \quad 0 < 2\varepsilon - \gamma < \gamma \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \gamma$$



Таким образом, в первом случае неравенство (21) имеет решение $0 < \beta < \gamma$, во втором случае решение отсутствует, в третьем случае это неравенство имеет решение $2\varepsilon - \gamma < \beta < \gamma$.

Устойчивость восьмой особой точки упрощенной динамической системы бу-

дет иметь место, когда действительные части корней кубического уравнения (19) являются отрицательными. Согласно условий Рауса–Гурвица, для того, чтобы все корни произвольного кубического уравнения

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (22)$$

с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно,

чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица для уравнения (22)

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

были положительны:

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_2 a_3 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_3 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (24)$$

Для нашего конкретного уравнения (19) условия (24) примут вид:

$$\begin{cases} \left[A^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} \right) + 2AB \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} \right) \right] \left[A^2 B \left(\frac{2\gamma\varepsilon^2}{\beta^3} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} - 1 \right) - AB^2 \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} \right] > 0; \\ -(2A+B) \left[A^2 B \left(\frac{2\gamma\varepsilon^2}{\beta^3} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} - 1 \right) - AB^2 \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} \right] > 0; \\ -(2A+B) \left[A^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} \right) + 2AB \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} \right) \right] - A^2 B \left(\frac{2\gamma\varepsilon^2}{\beta^3} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} - 1 \right) + AB^2 \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} > 0. \end{cases} \quad (25)$$

Рассмотрим случай $\beta > \gamma$, тогда первый множитель первого неравенства системы (25) положителен, так как $A < 0, B < 0$. Следовательно, второй множитель этого не-

равенства должен быть положительным. Отсюда следует, что второе неравенство выполняется автоматически. Третье неравенство приводится к виду

$$2A^3 \left(\frac{\gamma^2}{\beta^2} - 1 \right) - 4A^2B - 3A^2B \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} - 2AB^2 - \frac{AB^2\varepsilon^2}{\beta^2} - \frac{2A^2B\gamma\varepsilon^2}{\beta^3} > 0,$$

и следовательно, для тех же условий ($\beta > \gamma, A < 0, B < 0$) выполняется автоматически.

Таким образом, все корни кубического уравнения (19) будут иметь отрицательные действительные члены при

$$A^2B \left(\frac{2\gamma\varepsilon^2}{\beta^3} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} - 1 \right) - AB^2 \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\gamma}{\beta} - 1 + \left(\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\varepsilon^2} \right) > \frac{B}{A} = \frac{z_*}{x_*}. \quad (26)$$

При $\beta > 2\gamma$ это неравенство заведомо не выполняется, так как его левая часть становится отрицательной. Таким образом, устойчивый узел или устойчивый фокус

для восьмой особой точки будет находиться в следующей области изменения параметров упрощенной динамической системы (5)

$$\begin{cases} \frac{2\gamma}{\beta} - 1 + \frac{(\gamma^2 - \beta^2)}{\varepsilon^2} > \frac{B}{A}; \\ \gamma < \beta < 2\gamma; \\ 2\varepsilon - \gamma < 0. \end{cases} \quad (27)$$

Аналитическое рассмотрение других случаев достаточно сложное и рассматриваться не будет. Сингулярный случай при $\beta = \gamma$ приводит к отсутствию решений алгебраической системы (6) для определения координаты особой точки.

Таким образом, качественный анализ динамической системы (5) показывает, что существуют два режима ее поведения с полным подавлением одного вуза другим при полном исчерпании стационарного резерва абитуриентов (особые точки 2 и 3); два аналогичных режима при наличии стационарного резерва абитуриентов (особые точки 5

и 6); два режима взаимного сосуществования вузов при наличии (особая точка 8) и исчерпании (особая точка 7) стационарного резерва абитуриентов; два неустойчивых режима поведения образовательной системы (особые точки 1 и 4).

При этом следует отметить, что для особых точек 5, 6 и 8 возможны ситуации, когда $z_* = 0$ (исчерпание стационарного резерва абитуриентов).

Другие более сложные режимы поведения динамической системы (5) (например, автоколебания) могут быть выявлены в результате численных экспериментов.

Динамическая система (5) может быть легко распространена на абитуриентов). В этом случае она имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1^2 - \gamma_{12} x_1 x_2 - \dots - \gamma_{1i} x_1 x_i - \dots - \gamma_{1n} x_1 x_n + \varepsilon_1 x_1 z; \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_2^2 - \gamma_{21} x_2 x_1 - \dots - \gamma_{2i} x_2 x_i - \dots - \gamma_{2n} x_2 x_n + \varepsilon_2 x_2 z; \\ \vdots \\ \frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i - \beta_i x_i^2 - \gamma_{i1} x_i x_1 - \dots - \gamma_{ij} x_i x_j - \dots - \gamma_{in} x_i x_n + \varepsilon_i x_i z; \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \alpha_n x_n - \beta_n x_n^2 - \gamma_{n1} x_n x_1 - \dots - \gamma_{ni} x_n x_i - \dots - \gamma_{n,n-1} x_n x_{n-1} + \varepsilon_n x_n z; \\ \frac{dz}{dt} = \alpha_{n+1} z - \beta_{n+1} z^2 - \varepsilon_1 x_1 z - \dots - \varepsilon_i x_i z - \dots - \varepsilon_n x_n z. \end{cases} \quad (28)$$

Особые точки этой динамической системы алгебраических уравнений определяются из решений.

$$\begin{cases} x_1 (\alpha_1 - \beta_1 x_1 - \gamma_{12} x_2 - \dots - \gamma_{1i} x_i - \dots - \gamma_{1n} x_n + \varepsilon_1 z) = 0; \\ x_2 (\alpha_2 - \beta_2 x_2 - \gamma_{21} x_1 - \dots - \gamma_{2i} x_i - \dots - \gamma_{2n} x_n + \varepsilon_2 z) = 0; \\ \vdots \\ x_i (\alpha_i - \beta_i x_i - \gamma_{i1} x_1 - \dots - \gamma_{ij} x_j - \dots - \gamma_{in} x_n + \varepsilon_i z) = 0; \\ \vdots \\ x_n (\alpha_n - \beta_n x_n - \gamma_{n1} x_1 - \dots - \gamma_{ni} x_i - \dots - \gamma_{n,n-1} x_{n-1} + \varepsilon_n z) = 0; \\ z (\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} z - \varepsilon_1 x_1 - \dots - \varepsilon_i x_i - \dots - \varepsilon_n x_n) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Общее количество особых точек с различными сочетаниями нулевых и ненулевых элементов равняется 2^{n+1} [6]. По аналогии с анализом трехмерной динамической системы здесь имеют место различные режимы подавления одних вузов другими, и могут возникать различные коалиции вузов, которые со временем подавляют другие. Допустим, на рынке образовательных услуг конкурируют между собой пять однопрофильных вузов, тогда, например,

коалиций из трех вузов, можно будет создать в количестве (трех сочетаний из пяти):

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Список литературы

1. Weidlich W. Stability and cyclity in social systems // Behavioral Science. – 1988. – № 33. – P. 241.
2. Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 240 с.

3. Серков Л.А. Синергетические аспекты моделирования социально-экономических процессов. – Екатеринбург: ИЭУрО РАН; Изд-во АМБ, 2008. – 216 с.
4. Московкин В.М., Журавка А.В. Математическое моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий в общественных науках // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2001. – № 3-4. – С. 46–51.
5. Московкин В.М., Журавка А.В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий: (контекст уравнений популяционной динамики в социально-экономических системах) // Бизнес Информ. – Харьков, 2002. – № 5-6. – С. 27–34.
6. Московкин В.М., Журавка А.В., Михайлов В.С. Расчет сценариев конкурентных, кооперационных и смешанных стратегий для n -мерной модели конкурентно-кооперационных взаимодействий в социально-экономических системах // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2004. – № 5-6 (29-30). – С. 32–34.

MODELING OF FORMATION OF INSTITUTES OF HIGHER EDUCATION CONTINGENTS ON THE BASIS OF POPULATION DYNAMICS EQUATIONS

Moskovkin V.M., Bilal N.E. Sulejman

*The Belgorod state university, Belgorod,
e-mail: moskovkin@bsu.edu.ru*

The mathematical competition model of two institutes of higher education for limited contingent of entrants, offered by L.A. Serkov, has been simplified up to level, allowing to investigate it by methods of the qualitative theory of dynamic systems. 8 critical points of the simplified dynamic system are defined and the analysis of their stability was made. It has allowed to receive all regimes of educational system's behavior. The model spreads on $n + 1$ – dimensional case (n institutes of higher education competing for the limited contingent of entrants).

Key words: mathematical model, population dynamics equations, higher education competition, qualitative theory of dynamic systems, stability of critical points, higher education contingents